Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XIV-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018

CLASA a X-a

Subiectul 1.

Fie n un număr natural, $n \geq 3$ și n numere complexe nenule și distincte z_k, $k = \overline{1,n}$, care verifică relațiile $|z - z_k| = |z_k|$, pentru orice $k = \overline{1,n}$, unde $z = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$.

a) Demonstrați că $z = 0$.

b) Dacă $n = 3$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, arătați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Subiectul 2.

Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} x^2 + \log_2 x = y \\ y^2 + \log_2 y = z \\ z^2 + \log_2 z = x \end{cases}$$

Subiectul 3.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$3\sqrt{x^2+1} + 6\sqrt{x^2+4} + 8\sqrt{x^2+9} = 3\sqrt{x^2+25} + 6\sqrt{x^2+16}.$$

Subiectul 4.

a) Arătați că dacă $g: X \to Y$ este o funcție injectivă, atunci pentru orice submulțimi nevide X_1, X_2 ale lui X are loc egalitatea $g(X_1 \setminus X_2) = g(X_1) \setminus g(X_2)$.

(Prin definiție, $g(Z) = \{g(z) \mid z \in Z\}$, pentru orice submulțime Z a lui X.)

b) Demonstrați că nu există funcții $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea că $f(f(n)) = n + 2019$ pentru orice n număr natural.

Notă:

1) Timp de lucru 3h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a IX-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018
CLASA a X-a
Barem

Subiectul 1.

Fie n un număr natural, $n \geq 3$ și n numere complexe nenule și distincte z_k, $k = \overline{1,n}$, care verifică relațiile $|z - z_k| = |z_k|$, pentru orice $k = \overline{1,n}$, unde $z = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$.

a) Demonstrați că $z = 0$.

b) Dacă $n = 3$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, arătați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Soluție.

a) $|z - z_k|^2 = |z_k|^2 \Leftrightarrow |z|^2 - z \cdot \overline{z_k} - \bar{z} \cdot z_k + |z_k|^2 = |z_k|^2$ ………………………………………… …**1p**

Insumând aceste relații pentru k de la 1 la n obținem

$n|z|^2 - z \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}) - \bar{z} \cdot (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = 0 \Leftrightarrow n|z|^2 - 2|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.............**3p**

b) $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ de unde rezultă că O este centrul cercului circumscris triunghiului de afixe z_1, z_2, z_3.

Din **a)** rezultă că $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ si deci $H = O$ de unde rezultă că triunghiul este echilateral. ……….**3p**

Subiectul 2. Rezolvați în $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul

$$\begin{cases} x^2 + \log_2 x = y \\ y^2 + \log_2 y = z \\ z^2 + \log_2 z = x \end{cases}$$

Soluție.

Avem $x, y, z > 0$
Presupunem că $x \leq y$. Atunci $x^2 + \log_2 x \leq y^2 + \log_2 y \Rightarrow y \leq z \Rightarrow y^2 + \log_2 y \leq z^2 + \log_2 z \Rightarrow z \leq x$
Deci $x \leq y \leq z \leq x$ adică $x = y = z$.
La fel dacă presupunem că $x \geq y$ obținem $x = y = z$. **4p**
Rămâne să rezolvăm ecația $x^2 + \log_2 x = x \Leftrightarrow x^2 + \log_2 x^2 = x + \log_2 x$
Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \log_2 x$, f este strict crescătoare și deci injectivă.
Ecuația devine $f(x) = f(x^2) \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x = 1$. Deci $x = y = z = 1$ **3p**

Subiectul 3.
Rezolvați în **R** ecuația:

$$3\sqrt{x^2+1} + 6\sqrt{x^2+4} + 8\sqrt{x^2+9} = 3\sqrt{x^2+25} + 6\sqrt{x^2+16}.$$

Soluție.

$$3\left(\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2+1}\right) + 6\left(\sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2+4}\right) = 8\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \frac{24}{\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2+1}} + 6 \cdot \frac{12}{\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+4}} = 8\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2+1}} + \frac{9}{\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+9}$$

Dar $\frac{9}{\sqrt{x^2+25}+\sqrt{x^2+1}}+\frac{9}{\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{9}{6}+\frac{9}{6}=3$ și $\sqrt{x^2+9} \geq 3$

Deci egalitatea are loc dacă ambii membri sunt 3 și deci $x=0$ verifică egalitatea.

Subiectul 4.

a) Arătați că dacă $g: X \rightarrow Y$ este o funcție injectivă, atunci pentru orice submulțimi nevide X_1, X_2 ale lui *X* are loc egalitatea $g(X_1 \setminus X_2)=g(X_1) \setminus g(X_2)$.

(Prin definiție, $g(Z)=\{g(z) \mid z \in Z\}$, pentru orice submulțime *Z* a lui *X*.)

b) Demonstrați că nu există funcții $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care au proprietatea că $f(f(n))=n+2019$ pentru orice *n* număr natural.

Soluție.

a) Fie $y \in g(X_1 \setminus X_2)$. Atunci există $x \in X_1 \setminus X_2$ astfel ca $g(x)=y$.

$$x \in X_1 \text{ și } x \notin X_2 \Rightarrow y \in g(X_1)$$

Dacă $y \in g(X_2)$ atunci $y=g(z), z \in X_2$ dar $g(x)=y$ și g este injectivă $\Rightarrow z=x$ fals **2p**

Deci $g(X_1 \setminus X_2) \subset g(X_1) \setminus g(X_2)$.

Dacă $y \in g(X_1) \setminus g(X_2) \Rightarrow y \in g(X_1)$ și $y \notin g(X_2) \Rightarrow y=g(x), x \in X_1 \setminus X_2$ **2p**

b) Presupunem că există o astfel de funcție. Dacă $f(n)=f(m) \Rightarrow$

$f(f(n))=f(f(m)) \Rightarrow n+2019=m+2019 \Rightarrow n=m$ deci f este injectivă **1p**

Considerăm mulțimea $A=\mathbf{N} \setminus f(\mathbf{N})$ și $B=f(\mathbf{N}) \setminus f(f(\mathbf{N}))$.

Din a) avem că $f(A)=B$ și cum f este injectivă *A* și *B* au același număr de elemente.

$$A \cup B=\mathbf{N} \setminus f(f(\mathbf{N})) \text{ și } f(f(\mathbf{N}))=\{2019,2020, \ldots\} \Rightarrow A \cup B=\{0,1.2, \ldots, 2018\}$$

$A \cap B=\emptyset,\ card(A \cup B)=2019$ contradicție cu faptul că *A* și *B* au același număr de elemente **2p**